En esta oportunidad abordaremos seis aspectos importantes, Dificultada en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Método de Punto Fijo Multivariable . Método de Newton Raphson. Método de Newton Raphson Modificado. Método de Broyden. Aceleración de Convergencia.



**Dr. Ing. Santiago E Contreras Aranda**

[santicontreras@live.com](mailto:santicontreras@live.com) ; [scontreras@unmsm.edu.pe](mailto:scontreras@unmsm.edu.pe)

Lima Perú

SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Contenido

[UNIDAD N°. 3 1](#_Toc19104917)

[SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES 1](#_Toc19104918)

[3.1. Introducción 1](#_Toc19104919)

[3.2. Dificultad en la solución de los Sistemas de Ecuaciones no Lineales 2](#_Toc19104920)

[3.2.1. Reducir las ecuaciones 3](#_Toc19104921)

[3.2.2. Partición de una ecuación. 3](#_Toc19104922)

[3.2.3. Tanteo de ecuaciones. 4](#_Toc19104923)

[3.2.4. Valores iniciales. 4](#_Toc19104924)

[3.3. Método de Punto Fijo Multivariable 6](#_Toc19104925)

[3.4. Método de Newton Raphson Multivariable 11](#_Toc19104926)

[3.5. Método de Newton Raphson Modificado 14](#_Toc19104927)

[3.6. Método de Broyden 17](#_Toc19104928)

[Ejemplo. 19](#_Toc19104929)

[3.7. Aceleración de convergencia 22](#_Toc19104930)

# UNIDAD N°. 3

# SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

## 3.1. Introducción

En esta oportunidad trataremos de generalizar los diversos métodos usados para solucionar ecuaciones no lineales para sistemas no lineales, es decir trataremos de generalizar expresiones de la forma:

,…., (1)

Es decir

, para es una función lineal o no lineal de sus variables independientes .

En otras palabras, un sistema no Lineal es;

. Siendo F es una funcional, donde se trata de encontrar , tal que .

Es decir, trataremos ecuaciones de la forma

En nuestro esquema mental será, tal que

Que representa a una circunferencia interceptado por una parábola. Así podemos sistematizar una diversidad de sistemas

Debemos decir que generalmente se utilizan la generalización de métodos vistos para solucionar ecuaciones no lineales, en particular nuestro objetivo es reflexionar sobre el Método de punto fijo Multivariado, Método de Newton Raphson, El método de Newton Raphson Modificado, y el Método de Broyden.

## 3.2. Dificultad en la solución de los Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Antes de introducirnos de lleno en los métodos citados anteriormente, veamos algunas de las dificultades que encontraremos al enfrentarnos al mundo Real Consensual Organizacional Dinámico.

1°. La imposibilidad de representar gráficamente las ecuaciones de grado mayor que 2 . es decir, para .

2° La dificultad para encontrar buenos valores iniciales.

Con el criterio de mitigar las reflexiones anteriores sugerimos: Reducir las ecuaciones, Partición de una ecuación. Tanteo de ecuaciones. Valores iniciales.

### 3.2.1. Reducir las ecuaciones

Es muy importante reducir el número de ecuaciones y de variables antes de intentar la solución numérica del sistema, en particular tratar de resolver una de las ecuaciones en función de alguna de las variables, y después sustituir a las demás ecuaciones, en estas circunstancias el sistema se reduce en una variables, continuar hasta que sea posible.

Ejemplo.

.

.

Observemos, que de la ecuación 2, podemos despejar la variable uno y luego sustituirlo en la ecuación uno. Es decir.

, luego en la ecuación uno.

.

Como observamos no se tuvo dificultad para determinar una solución del sistema.

### 3.2.2. Partición de una ecuación.

Existen oportunidades que es más fácil dividir en subsistemas menores y resolverlo por separado. Por ejemplo, que ocurre si tenemos:

Observamos que en vez de resolver las cinco ecuaciones primero solucionamos las ecuaciones y en seguida solucionaremos las ecuaciones este criterio se puede decir que cociste en dividir el sistema inicial en un sistema de bloques pequeños que incluya todas las variables que se requieren para resolver el sistema general de ecuaciones.

### 3.2.3. Tanteo de ecuaciones.

Supongamos que se quiere resolver el siguiente sistema,

.

Como observamos este conjunto de ecuaciones n se pueden subdividir en subsistemas de ecuaciones, pues es preciso resolverlo de manera simultánea. Sin embargo, es posible realizar el problema de solución usando otro camino. Vamos a considerar que se requiere un valor de para resolver la primera ecuación de la cual obtenemos el valor de **,** y de obtenemos , y de y finalmente se comprobaría la estimación que se a hecho de . sin embargo, puede ocurrir que puede tomar cero o menor del valor que se requiere estimar, en este caso las estimaciones anteriores de serían aproximaciones a la solución buscada. Es preciso observar la relación con el método del punto fijo analizado la solución de ecuaciones no lineales .puesto que en problemas multivariables en se trata de uno y unidimensional para decir,

.

### 3.2.4. Valores iniciales.

1. Consideraciones de aspectos físicos

Si ocurriera que el sistema de ecuaciones iniciales tuviera significado físico, entonces, con frecuencia es posible acotar los valores de las incógnitas teniendo presente esas consideraciones físicas. Para decir si alguna de las variables se trataría velocidad de flujo en ese caso la variable debe de ser mayor o igual a cero. Pero si esa variable represente una concentración expresa, entonces el valorde la variable sería una fracción es decir su valor sería mayor o igual a cero y menor o igual a uno estos es .

1. Consideraciones geométricas

En el caso particular si tenemos el sistema escrito arriba.

.

.

Donde cada una representa una curva en el plano , y luego verse como encontrar un punto o los puntos de la intersección entre las curvas, como esta en el plano es posible graficarlo, para ello podemos usar cualquier software como Matlab.

Por ejemplo,

.

.

Obtenemos la siguiente,

Sin embargo, es preciso conocer las características de cada metodología, para solucionar el sistema de ecuaciones no lineales**.**

## 3.3. Método de Punto Fijo Multivariable

Debemos aclarar esta metodología es aplicable a un sistema de n ecuaciones no lineales con n variables, pero por cuestiones de interpretación y didácticas consideraremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

. (2)

.

Obsérvese que trata de encontrar pares de valores que estén en , es decir puntos , que satisfagan ambas ecuaciones. Como el método de punto fijo, o el método de Gauss-Seidel, o el método de Jacobi. Se desarrollará la primera ecuación para alguna de las variables, por ejemplo x, y para la segunda y.

(3)

.

Igual que los métodos ya analizados, tratando de hallar estimaciones hasta (k+1) n ésima, a partir de la ecuación k-ésima con las expresiones:

(4)

Se inicia con valores iniciales , se determinan nuevos valores , se repite el proceso, esperando que después de cada iteración los valores de , se aproxime a la raíz buscada . la cual cumple con,

.

Usando analogía con los casos analizados en nuestro caso con el método de punto fijo, el método de Gauss-Seidel, el método de Jacobi. Se puede predecir el comportamiento y las características del método de punto fijo multivariado.

Es preciso observar el caso de una variable la forma de pasar de f(x)=0 a , afecta a la convergencia del proceso iterativo. Entonces se debe de esperar que la manera en que se resuelva para , y para , afecte a la convergencia de las iteraciones k+1, del sistema (4).

Así mismo se conoce que el reordenamiento de la ecuación en las ecuaciones lineales en el caso lineal afecta la convergencia, entoces , s debe esperar que en nuestro caso de reflexión debe de afectar es decir estará en función de si se despeja x de , o de .

Finalmente, como en el caso del método iterativo univariable y el método de Jacobi y de Gauss Seidel, la convergencia, es de primer orden, en ese sentido en el método de reflexión también será de primer orden.

**Ejemplo. 1.**

Encontrar una solución para el sistema de ecuaciones no lineal,

Solución

**Primero.** Despejamos de la primera -10x, y de la segunda -10y obtenemos,

,

.

**Segundo.** Escribimos en general,

,

.

**Tercero.** Tomando como valores iniciales , ,

**Cuarto**. Iniciamos el proceso iterativo

**K=1**

,

.

**K=2.**

,

.

A seguir presentamos el siguiente cuadro.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| k |  |  |
| 0 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1 | 0.80000 | 0.80000 |
| 2 | 0.92800 | 0.93120 |
| 3 | 0.92800 | 0.93120 |
| 4 | 0.98937 | 0.98944 |
| 5 | 0.99578 | 0.99579 |
| 6 | 0.99833 | 0.99832 |
| 7 | 0.99933 | 0.99933 |
| 8 | 0.99973 | 0.99973 |
| 9 | 0.99989 | 0.99989 |
| 10 | 0.99996 | 0.99996 |
| 11 | 0.99998 | 0.99998 |
| 12 | 0.99999 | 0.99999 |
| 13 | 1.00000 | 0.00000 |

Ver: Antonio Nieves, Federico. Domínguez (1995) Métodos Numérico Aplicado a la Ingeniería Primera Edición México pg.261.

Criterios de convergencia:

, (5)

para todos los puntos (x,y) de la región del plano.

Debemos tener en consideración que si M es muy pequeño la iteración converge rápidamente; si M es próximo a uno en magnitud, la convergencia es lenta.

Resaltemos que sea cual sea la relación (4), a la cual sea haya llegado y donde se aplica el método, se puede aumentar la velocidad de convergencia usando desplazamientos sucesivos en vez de los desplazamientos simultáneos en la relación (4), es decir:

(6)

.

Como se realiza en el caso lineal de Jacobi y Gauss Seidel. Si la iteración por desplazamientos simultáneos diverge, generalmente el método por desplazamiento sucesivo divergiría más rápido, en otras palabras se detecta más rápido la divergencia, en consecuencia se recomienda en general el desplazamiento sucesivo en lugar de desplazamiento simultáneo.

**Ejemplo 2.**

Resolver el ejercicio anterior con desplazamiento sucesivo y el método de punto fijo.

**Solución**

**Primero.** Despejamos de la primera -10x, y de la segunda -10y obtenemos,

,

.

**Segundo.** Escribimos en general,

,

.

**Tercero.** Derivar para ver la convergencia,

,

, ,

**Cuarto.** Evaluando las derivadas con la finalidad de aplicar la condición de convergencia.

,

,

,

.

En consecuencia,

,

,

Luego podemos decir que satisface las condiciones de congruencia, luego podemos alcanzar .

**Primera iteración**.

,

,

Cálculo de la distancia entre el vector inicial y el vector  ,

.

**Segunda iteración**.

,

,

Cálculo de la distancia entre el vector inicial y el vector  ,

.

A seguir los resultados de las iteraciones

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| k |  |  |  |
| 0 | 0.00000 | 0.00000 |  |
| 1 | 0.80000 | 0.88000 | 1.18929 |
| 2 | 0.94144 | 0.96705 | 0.16608 |
| 3 | 0.98215 | 0.99006 | 0.04677 |
| 4 | 0.99448 | 0.99693 | 0.001411 |
| 5 | 0.99829 | 0.99905 | 0.00436 |
| 6 | 0.99947 | 0.99970 | 0.00135 |
| 7 | 0.99983 | 0.99991 | 0.00042 |
| 8 | 0.99995 | 0.99997 | 0.00013 |
| 9 | 0.99998 | 0.99999 | 0.00004 |
| 10 | 0.99999 | 1.00000 | 0.00001 |
| 11 | 1.00000 | 1.00000 | 0.00001 |

Algoritmo para el Método del Punto Fijo Multivariable

## 3.4. Método de Newton Raphson Multivariable

Considerando el método de Newton Raphson para una variable, pues estructurar un método de convergencia cuadrática, la llamaremos método de Newton Raphson multivariable, iniciamos para dos variables y otras solo se generaliza.

Consideremos el sistema de ecuaciones de segundo orden,

Donde las dos ecuaciones son continúas y diferenciables, de manera que se pueda aplicar la Serie de Taylor para su expansión,.

.

Donde se ha expandido alrededor de (a, b) y todas la derivadas parciales están valoradas en (a, b).

Expandiendo alrededor ,

. (7)

Donde todas las derivadas están evaluadas en , y de igual manera se puede realizar para

. (8)

Ahora supongamos que , y están cerca de las raíces buscadas , y que las funciones se aproximan a cero, en consecuencia se tiene.

,

. (9)

Con la finalidad de simplificar,

.

. (10)

De esta manera (k+1)-ésima iteración en función de k-ésima, se tiene:

. (11)

Remplazado (10) en la (9) tenemos,

,

. (12)

Es preciso observar que la relación (12) es un sistema de ecuaciones en donde h, y p son las incógnitas, en consecuencia, el determinante de sus coeficientes o Jacobiano debe de diferente de cero, es decir,

Si recordamos el método de Newton Raphson consiste en formar y resolver el sistema (12).

**Ejemplo 3.**

Usar el método de Newton Raphson. Para resolver:

Solución

Primero, construimos la matriz de coeficientes es decir la ecuación (12) conocida como matriz de derivadas parciales

,

Luego construimos la aumentada,

.

**Primera iteración.**

1. Evaluamos a la matriz en .

.

Resolviendo por eliminación gaussiana tenemos,

1. Sustituir en la ecuación (11).

,

.

**C)**. Calcular, la distancia entre

.

**Segunda.** Iteración

1. Evaluamos a la matriz en .

.

.

Resolviendo por eliminación gaussiana tenemos,

1. Sustituir en la ecuación (11).

,

.

1. Calcular, la distancia entre

.

Continuando el proceso iterativo, se tiene,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| k |  |  |  |
| 0 | 0.00000 | 0.00000 |  |
| 1 | 0.80000 | 0.88000 | 1.18929 |
| 2 | 0.99179 | 0.99171 | 0.22190 |
| 3 | 0.99998 | 0.99997 | 0.00830 |
| **4** | **1.00000** | **1.00000** | **0.00004** |

Se precisa observar la diferencia en el número de iteraciones con el método anterior se realizó 11 y con el presente método solo 4.

## 3.5. Método de Newton Raphson Modificado

Este método consiste en aplicar el método de Newton Raphson para una variable dos veces para el caso de n ecuaciones no lineales con n incógnitas se aplicará n veces una para cada variable. Cada que se realiza se considera las otras variables fijas.

Consideremos el siguiente sistema

**Primero.**

Considerando los valores iniciales , se calcula a partir del método de Newton Raphson para una variable un nuevo valor de  de la siguiente manera,

, con , valorado en .

Obsérvese que se a tomado a partir de , y los valores recientes de x, y..

**Segundo.**

Ahora haremos lo mismo para , y los valores recientes de x, y.. Para calcular el valor de

, con , valorado en , se tiene los valores de , con estos valores se calcula , después , y así sucesivamente.

Este método converge generalmente si se encuentra muy cerca de , y requiere la evaluación de solo 2n funciones cuatro para el caso de dos ecuaciones que se está manejando.

Obsérvese que se han empleado desplazamientos sucesivos, pero los desplazamientos simultáneos también son aplicables.

**Ejemplo 4**.

Usar el método de Newton Raphson Modificado, usando los valores iniciales . Para resolver:

**Solución**

**Primero**, obtenemos: , , esto es ,

**Primera Iteración**.

Evaluar , y , en .

,

.

Se determina

Para calcular se requiere evaluar , y , en , esto es:

,

.

Se determina

**Segunda Iteración**.

**Evaluar , y , en, y determinar**

,

.

Se determina

Para calcular se requiere evaluar , y , en , esto es:

,

.

Se determina .

Continuar con las otras iteraciones.

Generalización.

**Algoritmo,**

Para determinar una solución aproximada de un sistema de ecuaciones no lineales, proporcione las funciones en general y sus respectivas derivadas.

**Datos:** Ingresar el número de ecuaciones N, el vector de valores iniciales X, en número máximo de iteraciones MAXIT, el criterio de convergencia EPS y M=0 Para desplazamientos sucesivos o M=1 para desplazamientos simultáneos.

**Resultados**. El vector solución o mensaje no convergente,

Paso 1. Hacer K=1

**Paso 2,** mientras , repetir los pasos de 3 a 11.

**Paso 3.** Si M=0 hacer xaux=x

Paso 4. Hacer i=1

**Paso** 5. Mientras , repetir los pasos del 6 al 7,

**Paso 6**. Si

X(I)=X(I)-F(I,x)/D(I,x)

De otra manera hacer

**Paso 7**. Hacer I=I+1

**Paso 8.** Si

De otro modo continuar

**Paso 9.** Imprimir x y Terminar

**Paso 10.** Si M=1 hacer x=xaus

**Paso 11**. Hacer K=K+1

**Paso 12.** Imprimir no Converge y terminar.

## 3.6. Método de Broyden

En esta oportunidad trataremos generalizar el método de la secante para sistemas múltiples que se le llama método de Broyden según se vio anteriormente. El método de la secante consiste en sustituir la derivada de f en el método de Newton Raphson.

**Es decir**

**.**

Precisando para ello los puntos , y , para ello debemos de expresar ,

,

El vector , sea solución del sistema,

y si multiplicamos por , se tiene .

, en consecuencia, tenemos,

…..(+)

que es la ecuación anterior para ,

El método de la secante parasistemas de ecuaciones no lineales consiste en sustituir en la ecuación (+) con una matriz , cuyas componentes se obtienen con el resultado de dos iteraciones previas  **y**  de la siguiente manera.

.

O que es equivalente a

**,**

donde,

,

,

Para obtener, aplicamos el método de Newton así,

, donde

.

Cada iteración de , significa un esfuerzo computacional grande del orden de , el cual se puede reducir empleando una formula de inversión matricial de Sherman y Morrison la cual establece que si A es una matriz no singular siendo x, y sus vectores, entonces es no singular siempre que , además en este caso,

,

Este modelo permite determinar , teniendo , eliminando la necesidad de invertir una matriz en cada iteración, para esto primero se obtiene la inversa de la relación,

, es decir,

, después obtenemos,

,

,

,

Obteniendo finalmente,

. De esta manera,

,

,

, (\*)

Este modelo permite calcular la inversa de una matriz con sumas multiplicaciones de matrices solamente, con lo que se reduce el esfuerzo computaciones al orden .

### Ejemplo.

Use el método de Broyden para encontrar una solución aproximada del siguiente sistema

.

usando los valores iniciales . Se recomienda especialmente.

**Solución**.

Observemos que este ejemplo sirvió para verificar el método de Newton Raphson con las mismas características iniciales pues en primera iteración obtenemos:

, y su jacobiano valorado en (0,0) es:

, cuya inversa es, , con estos valores podemos calcular , utilizando la expresión. (+)

, sustituyendo

,

Calculamos , usando,

,

,

,

.

**Segunda iteración**

,

,

Obteniendo,

. en las otras iteraciones se obtienen:

.,

, que es la solución obtenida anteriormente.

### Algoritmo de Broyden

Para determinar una solución aproximada de un sistema de ecuaciones no lineales , se debe de proporcionar la matriz Jacobiana, ampliada con el vector de funciones,

**Datos:** El número de ecuaciones N, el vector de valores iniciales, x, el número máximo de iteraciones MAXIT y el criterio de Convergencia EPS.

Resultados: Una aproximación a una solución o mensaje No converge.

Paso 1. Calcular AK, la matriz inversa de la matriz Jacobiana

Paso 2. Hacer

Paso 3 Mientras repetir los pasos del 4 al 10.

Paso 4. Calcular y el vector de funciones evaluados en , respectivamente

Paso 5. Calculara la distancia de ,

Paso 6. Calcular a. Ak1 la matriz que aproxima a la inversa de la matriz jacobiana con la ecuación (\*) usando , a

Paso 5. Hacer

Paso 6. Si , ir al paso 8. Caso contrario continuar.

Paso 7. Calcular la distancia ,

Paso 8. Si , ir al paso 1 de otro modo continuar,

Paso 9. Hacer , x1=xn; AK=AK1, actualizar x0,x1y AK.

Paso 10. Hacer K=K+1

Paso 11. Si Imprimir el valor de xn y terminar de otro modo imprimir no converge.

## 3.7. Aceleración de convergencia